229 755 III

Über die
Dissipationsfunktion einer zähen Flüssigkeit.

Über die
Deformation einer plastisch-viskösen Scheibe.

Von

Ladislaus Natanson.

nderabdruck aus
Leip

300336

1180068577 PAd

Biblioteka

Über die Dissipationsfunktion einer zähen Flüssigkeit.

Von

Ladislaus Natanson[1].

§ 1. Um eine ganz allgemeine Definition der Dissipationsfunktion einer Flüssigkeit zu gewinnen, kann man in folgender Weise verfahren. Wir bezeichnen mit ϱ die Dichte der Flüssigkeit, mit u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit, mit p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{xz}, p_{xy} die Komponenten des Druckes, mit p den mittlern Druck in einem Punkte x, y, z und im Augenblick t. X, Y, Z seien die Komponenten der Beschleunigung, welche die äussern Kräfte im bezeichneten Punkte und im bezeichneten Augenblick hervorbringen. Mit diesen Bezeichnungen hat man drei ganz allgemeine Gleichungen, deren erste die folgende ist:

$$\varrho\left(\frac{du}{dt}-X\right)+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}=0. \tag{1a}$$

$\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{F}$ seien die kinetische und die freie Energie[2]) der Flüssigkeit; wir setzen:

$$e=\frac{\partial u}{\partial x}; \qquad a=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}; \tag{2a}$$

$$f=\frac{\partial v}{\partial y}; \qquad b=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}; \tag{2b}$$

$$g=\frac{\partial w}{\partial z}; \qquad c=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}; \tag{2c}$$

wir bezeichnen durch ω die Summe $e+f+g$ und durch $d\Omega$ ein Element des Flüssigkeitsvolumens Ω. Die Gleichungen (1) ergeben dann die folgende Gleichung;

---

[1]) Nach dem „Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie", Octobre 1902, übersetzt von A. Mittasch.

[2]) Siehe Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, März 1896, S. 117; Diese Zeitschr. 21, 193 (1896).

300336

DUBLET

$$d\mathfrak{T} + d\mathfrak{F} = dt\iiint d\Omega\varrho\,(uX + vY + wZ)$$
$$- dt\iiint d\Omega \left\{ p\omega + u\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z}\right) + w\left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right)\right\}. \quad (3)$$

S sei die Oberfläche, welche das Volumen Ω begrenzt, und dS ein Element dieser Oberfläche. Wir bezeichnen mit P_x, P_y, P_z die Komponenten des äussern Druckes, ausgeübt auf das Element dS. Die Gleichung (3) kann dann in folgender Form geschrieben werden:

$$d\mathfrak{T} + d\mathfrak{F} = dt\iiint d\Omega\varrho(uX + vY + wZ)$$
$$+ dt\iint dS\,(uP_x + vP_y + wP_z)$$
$$+ dt\iiint d\Omega\,\{(p_{xx} - p)\,e + (p_{yy} - p)\,f + (p_{zz} - p)\,g + p_{yz}\,a + p_{zx}\,b + p_{xy}c\}. \quad (4)$$

Die dreifachen Integrale beziehen sich auf alle Elemente des Volumens Ω, und das zweifache Integral auf alle Elemente der Oberfläche S. Die Gleichungen (3) und (4) drücken offenbar das Prinzip der Erhaltung der Energie aus, angewandt auf den besondern Fall, der uns hier beschäftigt; man kann also ganz allgemein sagen, dass die auf die Volumeneinheit bezogene Dissipationsfunktion einer Flüssigkeit durch den folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\chi = (p_{xx} - p)\,e + (p_{yy} - p)\,f + (p_{zz} - p)\,g + p_{yz}\,a + p_{zx}\,b + p_{xy}c. \quad (5)$$

Die Benennung: Dissipationsfunktion ist zum erstenmal 1873 von Lord Rayleigh bei Gelegenheit einer wichtigen Arbeit, die sich auf die verallgemeinerte Theorie der Dynamik bezieht[1]), angewandt worden. Der Begriff der Dissipationsfunktion einer Flüssigkeit ist jedoch, ebenso wie der Satz, der durch Gleichung (4) ausgedrückt wird, auf Sir G. G. Stokes zurückzuführen, der ihn in einer am 9. Dezember 1850 der Philosophical Society zu Cambridge vorgelegten Abhandlung aufgestellt hat[2]).

[1]) Proceedings of the London Mathematical Society **4**, 357 (1873). — Scientific Papers **1**, 170 (1899). Übrigens wird vielfach der Ausdruck — $^1/_2\chi$ als Dissipationsfunktion bezeichnet.

[2]) Transactions of the Cambridge Philosophical Society **9**. — Mathematical and Physical Papers **3**, 1 (1901); siehe besonders S. 67. Man hat zuweilen falschlich die Aufstellung des Theorems Helmholtz zugeschrieben (Verhandl. des naturw.-mediz. Vereins Heidelberg 5 (1869); Wissenschaftl. Abhandl. **1**, 223. 1882).

Wenn man in Übereinstimmung mit der Theorie der Viskosität von Poisson und von Stokes, in Gleichung (5) setzt:

$$p_{xx} - p = -2\mu e - \lambda\omega; \qquad p_{yz} = -\mu a; \tag{6a}$$

$$p_{yy} - p = -2\mu f - \lambda\omega; \qquad p_{zx} = -\mu b; \tag{6b}$$

$$p_{zz} - p = -2\mu g - \lambda\omega; \qquad p_{xy} = -\mu c, \tag{6c}$$

wobei λ und μ zwei Konstanten darstellen, so gelangt man zu dem Ausdruck:

$$\chi = -2\mu\left(e^2 + f^2 + g^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right) - \lambda\omega^2, \tag{7}$$

der ebenfalls von Stokes 1850 gegeben wurde.

§ 2. In einigen Arbeiten, die im Februar und März 1901, sowie Januar 1902 der Akademie eingereicht wurden, haben wir[1]) es unternommen, die Theorie der Viskosität von Poisson und von Stokes zu verallgemeinern. Der fundamentale Begriff, der unsern Untersuchungen zu Grunde liegt, stammt von Poisson und ist von Maxwell angenommen und entwickelt worden; es ist die Hypothese von der Relaxation. Wir setzen voraus, dass diese verborgene Erscheinung sich unaufhörlich im Innern aller flüssigen Körper vollzieht. Die Geschwindigkeit, mit welcher sie vor sich geht, ändert sich erheblich mit den Umständen. Sie kann äusserst gross sein, ohne jemals unendlich zu werden; sie kann sich aber auch kaum von Null unterscheiden.

Wir bezeichnen mit k und h die zwei Moduln der Kompressibilität, mit n den Modul der Starrheit (Rigidität), mit T die charakteristische Relaxationszeit für die in Frage stehende Flüssigkeit. Wir nennen p^0, p^0_{xx}, p^0_{yy}, p^0_{zz}, p^0_{yz}, p^0_{zx}, p^0_{xy} die Werte der Drucke, welche im Punkte x, y, z dem Anfangsmoment $t = 0$ entsprechen. Wir setzen ferner:

$$nT = \mu; \tag{1}$$

$$(k - h - \tfrac{2}{3}n)\,T = \lambda; \tag{2}$$

$$\varepsilon^{-t/T}\int_0^t \frac{dt}{T}\,\varepsilon^{t/T}\,e = E; \qquad \varepsilon^{-t/T}\int_0^t \frac{dt}{T}\,\varepsilon^{t/T}\,a = A; \tag{3a}$$

$$\varepsilon^{-t/T}\int_0^t \frac{dt}{T}\,\varepsilon^{t/T}\,f = F; \qquad \varepsilon^{-t/T}\int_0^t \frac{dt}{T}\,\varepsilon^{t/T}\,b = B; \tag{3b}$$

$$\varepsilon^{-t/T}\int_0^t \frac{dt}{T}\,\varepsilon^{t/T}\,g = G; \qquad \varepsilon^{-t/T}\int_0^t \frac{dt}{T}\,\varepsilon^{t/T}\,c = C; \tag{3c}$$

$$E + F + G = \Theta. \tag{4}$$

---

[1]) Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie 1901, 95 und 161; 1902, 19. — Diese Zeitschr. **38**, 690 (1901); **39**, 355 (1901); **40**, 581 (1902).

Nach unserer Theorie müssen die Gleichungen (6) des § 1 durch die folgenden ersetzt werden:

$$p_{xx} - p = (p^0_{xx} - p^0)\, \varepsilon^{-t/T} - 2\mu E - \lambda\Theta \tag{5a}$$

$$p_{yy} - p = (p^0_{yy} - p^0)\, \varepsilon^{-t/T} - 2\mu F - \lambda\Theta \tag{5b}$$

$$p_{zz} - p = (p^0_{zz} - p^0)\, \varepsilon^{-t/T} - 2\mu G - \lambda\Theta \tag{5c}$$

$$p_{yz} = p^0_{yz}\, \varepsilon^{-t/T} - \mu A \tag{6a}$$

$$p_{zx} = p^0_{zx}\, \varepsilon^{-t/T} - \mu B \tag{6b}$$

$$p_{xy} = p^0_{xy}\, \varepsilon^{-t/T} - \mu C. \tag{6c}$$

Nach diesen Gleichungen geht der Ausdruck (5) § 1 von χ in den folgenden über:

$$\chi = \varepsilon^{-t/T} \{(p^0_{xx} - p^0)\, e + (p^0_{yy} - p^0)\, f + (p^0_{zz} - p^0)\, g + p^0_{yz}\, a + p^0_{zx} b + p^0_{xy} c\}$$
$$- \{2\mu(eE + fF + gG) + \mu(aA + bB + cC) + \lambda\omega\Theta\}; \tag{7}$$

das ist der Wert, den man der Dissipationsfunktion einer zähen Flüssigkeit nach unsrer Theorie zuerteilen muss.

In der Gleichung (7) setzen wir $t = 0$. In diesem Fall verschwinden die Ausdrücke E, F, G, A, B, C, Θ, und wir finden die Form der Dissipationsfunktion wieder, die durch die allgemeine Gleichung (5) von § 1 gegeben wird.

§ 3. Die in solcher Weise definierte Dissipationsfunktion besitzt eine bemerkenswerte Eigenschaft, wie wir jetzt zeigen wollen. Stellen wir uns eine inkompressible und sehr zähe Flüssigkeit vor. Wir nehmen an, dass die Deformationen, denen man diese Flüssigkeit unterwirft, sehr langsam sind, so dass man in jedem Augenblick ihre kinetische Energie vernachlässigen kann. Anderseits setzen wir $= 0$ die äussern Kräfte, welche in (x, y, z) eine Beschleunigung hervorrufen, deren Komponenten X, Y, Z sind. Unter diesen Bedingungen gibt uns Gleichung (4) von § 1:

$$\iint dS\,(uP_x + vP_y + wP_z -) + \iiint d\Omega\chi = 0. \tag{1}$$

Hier ist χ eine Grösse, deren Form im allgemeinen Fall durch die Gleichung (5) von § 1 bestimmt wird; nimmt man die in unsern frühern Arbeiten vorgeschlagene Theorie an, so erhält sie die Gestalt (7) von § 2. Wir differenzieren Gleichung (1) nach der Zeit; wenn wir durch l, m, n die Kosinus der Winkel bezeichnen, welche die Normalė auf dem Element dS (in das Innere des Volumens Ω gerichtet) mit den Koordinatenachsen bildet, so haben wir:

$$\frac{d}{dt}\iint dS\,(uP_x + vP_y + wP_z) + \iiint d\Omega\,\frac{d\chi}{dt} - \iint dS\,(lu + mv + nw)\chi = 0. \qquad (2)$$

Wir berechnen nun den Wert von $\frac{d\chi}{dt}$, indem wir den Ausdruck (7), § 2 der Funktion χ annehmen. Indem wir die Ausdrücke vernachlässigen, welche $\frac{de}{dt}$, $\frac{df}{dt}$, $\frac{dg}{dt}$, $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$ enthalten, finden wir:

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{\chi}{T} - \frac{2\mu}{T}\left(e^2 + f^2 + g^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right). \qquad (3)$$

Gehen wir zurück auf die Gleichung (7), § 1, so zeigt sich, dass der zweite Ausdruck des zweiten Gliedes (wenn man vom konstanten Faktor $\frac{1}{T}$ absieht) den nach der Theorie von Poisson und von Stokes berechneten Wert der Dissipationsfunktion für eine zähe inkompressible Flüssigkeit darstellt. Man kann also den folgenden Satz aufstellen: Es seien χ und ςT die Werte der dissipativen Funktion einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit, berechnet bezw. nach der Theorie, die wir angegeben haben, und nach derjenigen von Poisson und Stokes. Wenn die Deformation, welche man der Flüssigkeit auferlegt, langsam erfolgt, und die äussern Kräfte nicht in Betracht kommen, so hat man:

$$\frac{d\chi}{dt} + \frac{\chi}{T} - \varsigma = 0. \qquad (4)$$

Verbunden mit Gleichung (1) liefert Gleichung (4) folgendes:

$$\iiint d\Omega\,\frac{d\chi}{dt} = \frac{1}{T}\iint dS\,(uP_x + vP_y + wP_z) + \iiint d\Omega\,\varsigma; \qquad (5)$$

Gleichung (2) nimmt danach die Form an:

$$\frac{d}{dt}\iint dS\,(uP_x + vP_y + wP_z) + \frac{1}{T}\iint dS\,(uP_x + vP_y + wP_z) + \iiint d\Omega\,\varsigma - \iint dS\,(lu + mv + nw)\chi = 0. \qquad (6)$$

Die Gleichungen (4) und (6) drücken das Theorem aus, das wir aufzustellen beabsichtigten.

§ 4. Zum Schlusse sei uns gestattet, die Aufmerksamkeit des Lesers auf die interessante Form, welche man einem bekannten Theorem der Elastizitätstheorie geben kann, zu lenken. Lamé, welcher dasselbe in seinen Leçons[1]) anführt, schreibt seine Entdeckung Clapeyron zu. Es seien ξ, η, ζ die Komponenten der elastischen Verschiebung in einem Punkte x, y, z. Wir setzen:

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}; \qquad \alpha = \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}; \tag{1a}$$

$$\varphi = \frac{\partial \eta}{\partial y}; \qquad \beta = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \tag{1b}$$

$$\psi = \frac{\partial \zeta}{\partial z}; \qquad \gamma = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}. \tag{1c}$$

Sieht man von der Wirkung der äussern Kräfte ab, die durch die Ausdrücke X, Y, Z charakterisiert sind, so erlauben die aus dem Gleichgewicht der Volumenelemente sich ergebenden Gleichungen, die Richtigkeit des in folgender Gleichung enthaltenen Satzes zu zeigen:

$$\begin{aligned}&\iint dS(\xi P_x + \eta P_y + \zeta P_z)\\ &+\iiint d\Omega\,(p_{xx}\varepsilon + p_{yy}\varphi + p_{zz}\psi + p_{yz}\alpha + p_{zx}\beta + p_{xy}\gamma) = 0.\end{aligned} \tag{2}$$

Setzen wir für p_{xx} etc. die einem isotropen Medium entsprechenden Werte ein, so nimmt (2) die Gestalt an:

$$\begin{aligned}&\iint dS(\xi P_x + \eta P_y + \zeta P_z)\\ &-\iiint d\Omega\left\{2n\left(\varepsilon^2 + \varphi^2 + \psi^2 + \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}\right) + (k - \tfrac{2}{3}n)\Delta^2\right\} = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Hier bedeuten k und n die Moduln der Kompressibilität und der Rigidität des Mediums, und Δ die Summe $\varepsilon + \varphi + \psi$. Es sind dies die Gleichungen, welche das Theorem von Clapeyron bilden. Man sieht, dass dieser Satz den hydrodynamischen Theoremen, mit denen wir uns in dieser Notiz beschäftigt haben, völlig analog ist.

[1]) Leçons sur la Théorie mathématique de l'Élasticité des Corps Solides. Paris 1866, p. 80. Siehe Todhunter und Pearson, A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials, Cambridge 1886—1893, I., 578.

340820

1180068578 PAd

Über
die Deformation einer plastisch-viskösen Scheibe.

Von

Ladislaus Natanson[1]).

Stellen wir uns eine cylindrische Scheibe vor, d. h. einen kreisförmigen geraden Cylinder, dessen Höhe klein sei im Verhältnis zu den Dimensionen seines Querschnittes. Wir nehmen an, die Substanz der Scheibe gehöre zur Klasse der plastisch-viskösen Körper; der Sinn, den wir mit dieser Bezeichnung verbinden, wird im folgenden definiert werden. Um die Platte der Deformation zu unterwerfen, komprimiert man dieselbe zwischen zwei festen horizontalen Wänden. Die Stellung der untern Wand ist unveränderlich fixiert. Die obere Wand dagegen ist beweglich und erlaubt, auf die obere Fläche der Scheibe einen gleichmässigen Druck auszuüben, entweder mittels eines Gewichtes oder einer andern (konstanten oder variablen) Kraft. Die einzige Kraft, welche auf die Seitenfläche des Cylinders wirken möge, sei der atmosphärische Druck. Wir lassen die Substanz der Scheibe die Eigenschaft besitzen, den festen Wänden, die ihre Zusammendrückung bewirken, zu adhärieren; folgerichtig betrachten wir ein Hingleiten der Molekeln des Stoffes an diesen Wänden als unmöglich. Unter den besagten Bedingungen dehnt sich der Cylinder in lateralem Sinn aus: die Radien der Querschnitte nehmen zu (mit Ausnahme der Radien der zwei Grundflächen); die Höhe der Scheibe wird geringer, die obere feste Wand senkt sich tiefer. In der vorliegenden Arbeit sollen die Gesetze erörtert werden, welche diese Art von Deformation beherrschen.

Schon im Jahre 1877 unternahm es Herr A. v. Obermayer[2]), dasselbe Problem auf experimentellem Wege zu untersuchen. Die Beobachtungen dieses Forschers bezogen sich auf Pechscheiben, und er unterwarf die Resultate seiner Versuche der Rechnung unter der Annahme,

---

[1]) Nach dem „Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie", Oktober 1902, übersetzt von A. Mittasch.

[2]) Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissensch. in Wien, mathem.-naturw. Klasse, II. Abtg., **75**, 665 (1877).

dass diese Substanz den Gesetzen folge, die man gewöhnlich als für zähe Flüssigkeiten gültig erachtet. Indem er in unserm Falle eine von Stefan[1]) für ein analoges (aber nicht identisches) Problem entwickelte Formel anwendete, fand Herr A. v. Obermayer für den Reibungskoeffizienten des untersuchten Körpers Werte, die er für genügend untereinander übereinstimmend und für genügend nahe den Zahlen hielt, zu welchen man mit Hilfe anderer Methoden gelangt.

§ 1. Wir untersuchen das oben definierte Problem, indem wir zunächst gewisse vereinfachende Hypothesen einführen, von denen wir uns in der Folge freizumachen trachten werden. Die erste besteht in der Annahme, dass die Substanz der Scheibe einer gewöhnlichen zähen Flüssigkeit vergleichbar, jedoch mit einem sehr beträchtlichen Koeffizient der innern Reibung begabt sei; und im besondern, dass sie den wohlbekannten, von Navier, Poisson, Stokes und auch andern aufgestellten Gesetzen gehorche. Wir bezeichnen mit ϱ die Dichte des Körpers, mit p den mittlern Druck, mit u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit im Punkte x, y, z und im Augenblick t. Ferner seien X, Y, Z die Komponenten der Beschleunigung, welche im betrachteten Punkte und Augenblick die gegebenen äussern Kräfte hervorbringen. Endlich seien λ und μ die zwei Reibungskoeffizienten der Substanz. Mit diesen Bezeichnungen haben wir drei Gleichungen, deren erste die folgende ist:

$$\varrho\left(\frac{du}{dt}-X\right)+\frac{\partial p}{\partial x}-\mu\nabla^2 u-(\lambda+\mu)\frac{\partial\omega}{\partial x}=0. \tag{1a}$$

Hier ist gesetzt worden:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\omega. \tag{2}$$

Wir führen nun die folgenden weitern Hypothesen ein. Indem wir das Gewicht der Substanz der Scheibe vernachlässigen, setzen wir:

$$X=0; \qquad Y=0; \qquad Z=0. \tag{3}$$

Es ist *a priori* klar, dass die Deformation der Scheibe sich infolge der sehr beträchtlichen innern Reibung nur mit einer äusserst geringen Geschwindigkeit vollziehen kann; wir können daher alle Glieder von der Form $\varrho\,\frac{du}{dt}$ etc. vernachlässigen. Wenn es anderseits erlaubt ist, die Substanz der Scheibe als einen Körper aufzufassen, der, obgleich

[1]) Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissensch. in Wien, mathem.-naturw. Klasse, II. Abtg., **69**, 713 (1874).

zah, nichtsdestoweniger eine Flüssigkeit ist, so wird man berechtigt sein, die Kompressibilität dieser Substanz zu vernachlässigen, und zu setzen:

$$\omega = 0. \tag{4}$$

Die Gleichungen (1) vereinfachen sich gemäss diesen Hypothesen und erhalten die Gestalt:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \nabla^2 u = 0. \tag{5a}$$

Es ist klar, dass in der Scheibe während der ganzen Dauer der Deformation eine feste vertikale Symmetrieachse besteht; wir treffen die Übereinkunft, diese Achse als z-Achse zu nehmen; betreffs der Achsen x und y verfügen wir in der Ebene der untern Basis in beliebiger Weise. Eine letzte Hypothese, die wir (wenigstens provisorisch) annehmen, ist, dass die Variablen x, y, z in die Ausdrücke der Komponenten u, v, w in besonderer, im folgenden zu präzisierender Weise eintreten. Wir stellen durch l die Dicke, d. h. die vertikale Höhe der Scheibe dar, und durch J eine Grösse, die unabhängig von x, y, z ist, indessen eine Funktion der Variablen t sein kann. Wir setzen, wie es Stefan und Hr. v. Obermayer getan haben:

$$u = Jxz(l - z) \tag{6a}$$

$$v = Jyz(l - z). \tag{6b}$$

Die Ausdrücke für u und v genügen den Bedingungen, die offenbar zu erfüllen sind, dass u und v zu Null werden, wenn x oder $y = 0$, und dass sie ebenso für $z = 0$, und für $z = l$ verschwinden, welches auch die Werte von x und y seien. Aus den Gleichungen (6) ergibt sich mit Hilfe von Gleichung (4) unmittelbar der Wert des Differentialquotienten $\partial w/\partial z$. Setzen wir für die ganze untere Basis $w = 0$, so haben wir:

$$w = -Jz^2(l - {}^2/_3 z) \tag{6c}$$

für alle Werte, welche z zwischen $z = 0$ und $z = l$ annimmt. Der Wert des Koeffizienten J lässt sich unter Berücksichtigung der Tatsache bestimmen, dass, für $z = l$, die Komponente w notwendig gleich wird dl/dt; folglich ist:

$$J = -\frac{3}{l^3}\frac{dl}{dt}. \tag{7}$$

Die Werte (6) der Komponenten der Geschwindigkeit, verbunden mit Gleichung (7) genügen den kinematischen Bedingungen des Problems. Weiter unten erörtern wir die Frage, welche die dynamischen Bedingungen des Problems sind, und auf welche Weise sie erfüllt werden können.

Die Gleichungen (5) verbunden mit den Gleichungen (6) erlauben zu schreiben:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -2\mu J x \tag{8a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2\mu J y \tag{8b}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -2\mu J (l - 2z) \tag{8c}$$

Hieraus folgt, dass

1. in jeder horizontalen Ebene, wo $z =$ Konst., die Beziehung gilt:

$$dp = -2\mu J r dr, \tag{9}$$

wo r den Abstand eines Punktes (z, r) von der z-Achse bedeutet; folglich:

$$p(z, r) - p(z, 0) = -\mu J r^2. \tag{10}$$

2. Dass in der ganzen Länge einer jeden Vertikalen man die Gleichung hat:

$$dp = -2\mu J (l - 2z)\, dz, \tag{11}$$

die für zwei Punkte $z = z_1$, $z = z_2$ derselben Vertikalen gibt:

$$p(z_1, r) - p(z_2, r) = 2\mu J (z_1 - z_2)(z_1 + z_2 - l). \tag{12}$$

Wir betrachten jetzt die Mittelebene $z = {}^1\!/_2 l$; der äussere Radius des durch diese Ebene gelegten Schnittes übertrifft an Länge die Radien der andern Querschnitte der Scheibe. Wir setzen infolgedessen:

$$R = \max.\ R(z) = R({}^1\!/_2 l). \tag{13}$$

Gemäss der Gleichung (10) haben wir für diese Ebene:

$$p({}^1\!/_2 l, R) - p({}^1\!/_2 l, 0) = -\mu J R^2. \tag{14}$$

Anderseits setzen wir:

$$r = 0; \qquad z_1 = l; \qquad z_2 = {}^1\!/_2 l \tag{15}$$

in der Gleichung (12); sie erhält dann die Gestalt:

$$p(l, 0) - p({}^1\!/_2 l, 0) = {}^1\!/_2 \mu J l^2, \tag{16}$$

woraus sich durch Vergleich mit (14) ergibt:

$$p(l, 0) - p({}^1\!/_2 l, R) = \mu J ({}^1\!/_2 l^2 + R^2). \tag{17}$$

Nach diesen Feststellungen suchen wir die Komponenten der Drucke in einem Punkte x, y, z zu ermitteln, die wir (wie es gewöhnlich geschieht) mit p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{zx}, p_{xy}, bezeichnen.

Es seien:

$$e = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad a = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \tag{18a}$$

$$f = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad b = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{18b}$$

$$g = \frac{\partial w}{\partial z}; \qquad c = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{18c}$$

Gemäss der Theorie von Poisson und Stokes haben wir (siehe Gleichung (4):

$$p_{xx} - p = -2\mu e; \qquad p_{yz} = -\mu a; \tag{19a}$$

$$p_{yy} - p = -2\mu f; \qquad p_{zx} = -\mu b; \tag{19b}$$

$$p_{zz} - p = -2\mu g; \qquad p_{xy} = -\mu c; \tag{19c}$$

Die Komponenten e, f, g, a, b, c, welche in diese Ausdrücke eintreten, berechnen sich leicht mittels der Gleichungen (6):

$$e = Jz(l - z); \qquad a = Jy(l - 2z): \tag{20a}$$

$$f = Jz(l - z); \qquad b = Jx(l - 2z); \tag{20b}$$

$$g = -2Jz(l - z); \qquad c = 0; \tag{20c}$$

folglich kann man die Grössen $(p_{xx} - p)$, $(p_{yy} - p)$, $(p_{zz} - p)$, p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} als bekannt betrachten. Man findet unter anderm:

$$p_{xx} = p_{yy} \quad \text{und} \quad p_{xy} = 0. \tag{21}$$

Wir betrachten nun auf der Seitenfläche der Scheibe ein Element, in der Höhe $z = {}^1\!/_2 l$ gelegen; dieses Element steht senkrecht auf dem Radius R, der zu ihm hinführt. Es sei P der auf die Flächeneinheit bezogene atmosphärische Druck; da die Deformation der Scheibe sehr langsam erfolgt, so darf man voraussetzen, dass dieser Druck in der Richtung der Normalen auf den Elementen, die ihn erfahren, ausgeübt wird. Wir schreiben jetzt die Bedingungen nieder, welche für die Drucke an der Oberfläche der Scheibe gelten. Mit Berücksichtigung der Gleichung (21) sieht man leicht, dass für Elemente, die in der Höhe $z = {}^1\!/_2 l$ gelegen sind, die fragliche Bedingung sich folgendermassen darstellt:

$$P = p_{xx}({}^1\!/_2 l, R) = p_{yy}({}^1\!/_2 l, R) = p_{rr}({}^1\!/_2 l, R). \tag{22}$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (19) und (20):

$$P = p({}^1\!/_2 l, R) - {}^1\!/_2 \mu J l^2. \tag{23}$$

Wir wollen nun untersuchen, welche Form dieselbe Bedingung an der obern Endfläche der Scheibe annimmt. Es sei Π der mittlere Druck (auf die Flächeneinheit), den die bewegliche, zum Zusammendrücken der Substanz der Scheibe dienende Fläche auf diese Ebene ausübt. Wir bezeichnen mit R_l den Radius der obern Grundfläche; mit φ den Winkel, welcher zusammen mit z und r das gewöhnliche, cylindrische Koordinatensystem bildet. Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich die für die obere Grundfläche geltende Bedingung:

$$\pi R_l^2 (\Pi + P) = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R(z)} dr \,.\, r \,.\, p_{zz} \right)_{z=l} . \tag{24}$$

Aber man hat infolge der Gleichungen (19) und (10):

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R(z)} dr \,.\, r \,.\, p_{zz} = \pi R^2(z) \left\{ p(z,0) - 2\mu g - {}^1\!/_2 \mu J R^2(z) \right\}. \tag{25}$$

Gleichung (24) erhält also, mit Bezug auf Gleichungen (20), die Gestalt:

$$\Pi + P = p(l, 0) - {}^1\!/_2 \mu J R_l^2. \tag{26}$$

Ziehen wir Gleichung (23) von der Gleichung (26) ab, so erhalten wir:

$$\Pi = p(l, 0) - p({}^1\!/_2 l, R) + {}^1\!/_2 \mu J (l^2 - R_l^2), \tag{27}$$

woraus, durch Vergleich mit (17) folgt:

$$\Pi = \mu J (l^2 + R^2 - {}^1\!/_2 R_l^2). \tag{28}$$

Wenn man hier die Grösse l^2 im Vergleich mit R^2 vernachlässigt, und wenn man der variablen Grösse R^2 die Konstante R_l^2 substituiert, so gelangt man mit Berücksichtigung von Gleichung (7) zur Gleichung von Stefan:

$$\Pi = - {}^3\!/_2 \frac{\mu R_l^2}{l^3} \cdot \frac{dl}{dt}, \tag{29}$$

die von Herrn v. Obermayer als Lösung des uns beschäftigenden Problems angenommen worden ist.

Um eine weitere Annäherung zu erlangen, muss man eine Beziehung zwischen den Variablen l und R aufstellen. Entgegen unserm sonstigen Brauch, wollen wir für einen Augenblick mit x, y, z die Koordinaten eines bestimmten Flüssigkeitsteilchens bezeichnen; man hat, gemäss (6) und (7):

$$\frac{dx}{dl} = - \frac{3xz(l-z)}{l^3}, \tag{30a}$$

$$\frac{dy}{dl} = - \frac{3yz(l-z)}{l^3}, \tag{30b}$$

$$\frac{dz}{dl} = + \frac{3z^2(l - {}^2\!/_3 z)}{l^3}. \tag{30c}$$

Wir integrieren (30c), indem wir darin $z = ls$ setzen; es ergibt sich:

$$\frac{l_0}{l} = \frac{(2s_0 - 1)^2 s(s-1)}{(2s-1)^2 s_0(s_0 - 1)}, \tag{31}$$

wo l_0 und s_0 die Anfangswerte von l und s bedeuten. Zufolge der

der Gleichung (31) lassen sich die Gleichungen (30a) und (30b) leicht integrieren; man findet:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \left(\frac{2s_0 - 1}{2s - 1}\right)^3 \qquad \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = \left(\frac{2s_0 - 1}{2s - 1}\right)^3; \tag{32}$$

in diesen Gleichungen ist s eine Funktion von l, die nach Gleichung (31) als bekannt betrachtet werden kann. Die Gleichungen (31) und (32) gestatten, die Form zu bestimmen, welche nach unsern Hypothesen die Seitenfläche der deformierten Scheibe annimmt. Jedoch es ist für unsern Gegenstand von geringer Bedeutung, die Analyse so weit zu führen. Es genügt uns, festzustellen, dass, wenn man in Gleichung (31) $s_0 = {}^1/_2$ setzt, man ebenfalls für die ganze spätere Zeit $s = {}^1/_2$ findet. Die Molekeln, welche im Anfangsmoment $t = 0$ sich in dem mittlern Querschnitt $z = {}^1/_2 l$ befinden, bleiben also während der Deformation der Scheibe in diesem Querschnitte und sinken mit ihm zusammen. Gehen wir auf Gleichung (32) zurück, die, zufolge Gleichung (31), in die Form gebracht werden kann:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^4 = \left(\frac{y}{y_0}\right)^4 = \left(\frac{l_0 s_0 (s_0 - 1)}{l s (s - 1)}\right)^3. \tag{33}$$

Wir setzen in den Gleichungen (23) $s = s_0 = {}^1/_2$ und finden so:

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = \left(\frac{l_0}{l}\right)^{3/2}, \tag{34}$$

R bezeichnet, wie früher, den Radius des mittlern Querschnittes.

Gehen wir jetzt auf Gleichung (28) zurück und nehmen zur Vereinfachung an, dass die Anfangsform der Seitenfläche der Scheibe die eines geraden Cylinders gewesen sei. Wir haben dann, wenn wir Gleichung (34) in Betracht ziehen:

$$\Pi = -\frac{3\mu}{l^3}\left\{l^2 + R_0^2\left(\left(\frac{l_0}{l}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\right)\right\}\frac{dl}{dt}. \tag{35}$$

Die Gleichung ist eine Verallgemeinerung von (29). Beide Gleichungen lassen sich unmittelbar integrieren, wenn Π als Funktion der Zeit gegeben ist, oder wenn es einen konstanten Wert hat.

§ 2. Das Problem, welches uns im vorigen Paragraphen beschäftigt hat, kann auch durch Anwendung einer andern Methode gelöst werden. Gemäss einem bekannten Theorem kommt einer Flüssigkeit, die den Bewegungsgleichungen (1) § 1 unterworfen ist, eine Dissipationsfunktion zu, welche die folgende Eigenschaft besitzt. $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{F}$

seien die kinetische und die freie Energie einer bestimmten Flüssigkeitsmenge. Wir bezeichnen mit dW die elementare Arbeit der äussern Kräfte, denen die Flüssigkeit während der Zeit dt unterliegt, mit $d\Omega$ ein Element des Flüssigkeitvolumens Ω; für die Zeichen λ und μ, e, f, g, a, b, c, behalten wir die Bedeutung bei, die ihnen im vorhergehenden Paragraphen zuerteilt wurde. Das Theorem, auf welches wir eben hindeuteten, gibt uns die Beziehung:

$$d\mathfrak{T} + d\mathfrak{F} = \\ = dW - dt \iiint d\Omega \left\{ 2\mu \left(e^2 + f^2 + g^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \right) + \lambda \omega^2 \right\}, \quad (1)$$

wobei sich die Integration auf alle Elemente des Volumens Ω erstreckt. Um uns an die Annäherung, welche im vorigen Paragraphen angenommen worden ist, zu halten, setzen wir die Substanz der Scheibe als inkompressibel voraus, wir vernachlässigen ihre kinetische Energie und, indem wir dW berechnen, vernachlässigen wir auch die durch den Atmosphärendruck geleistete und ebenso die auf das Gewicht der Substanz der Scheibe zurückzuführende Arbeit. Im zweiten Ausdruck des zweiten Gliedes der Gleichung (1) schreiben wir $dz\, d\varphi\, dr\, r$ statt $d\Omega$ und ersetzen die Komponenten e, f, g, a, b, c durch ihre Werte (20) § 1. Wir haben dann:

$$\omega = 0; \quad d\mathfrak{F} = 0; \quad d\mathfrak{T} = 0; \quad dW = -\pi R_l^2 \Pi dl, \quad (2)$$

und Gleichung (1) gibt uns:

$$\Pi R_l^2 = -\frac{36\mu}{l^6} \cdot \frac{dl}{dt} \int_0^l dz R^2(z) \left\{ 3z^2 (l-z)^2 + \tfrac{1}{8} R^2(z) (l - 2z)^2 \right\}. \quad (3)$$

Die Gleichung (3) führt unmittelbar zu Gleichung (29) des vorigen Paragraphen, wenn man darin $3z^2(l-z)^2$ vernachlässigt und an Stelle der Funktion $R(z)$ die Konstante R_l setzt. Die Gleichungen (31) und (32) desselben Paragraphen erlauben, die Form der Funktion $R(z)$ zu bestimmen und die Rechnung in einer strengern Weise zu führen, welche wir hier nur angedeutet haben.

§ **3.** Wir untersuchen nun, wie sich die vorausgehenden Ergebnisse gestalten, wenn man gewisse, von uns angenommene Hypothesen aufgibt. In dem folgenden leisten wir Verzicht auf die Hypothese, dass die Kompressibilität $= 0$ ist. Anderseits substituieren wir für die Gleichungen (6) von § 1 die folgenden:

$$u = x\sigma(z); \quad v = y\sigma(z); \quad w = w(z). \quad (1)$$

Um den kinematischen Bedingungen zu genügen, von denen oben in § 1 die Rede war, setzen wir:

$$\sigma(0) = 0; \qquad \sigma(l) = 0; \qquad w(0) = 0; \qquad w(l) = \frac{dl}{dt}. \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) drücken offenbar eine neue Hypothese aus, die eine Verallgemeinerung der korrespondierenden Hypothese von § 1 ist. Gemäss den Gleichungen (1) hat man:

$$e = f = \sigma(z); \quad g = \frac{\partial w}{\partial z} = g(z); \quad \omega = 2\sigma(z) + g(z) = \omega(z); \tag{3}$$

$$a = y\frac{d\sigma(z)}{dz}; \qquad b = x\frac{d\sigma(z)}{dz}; \qquad c = 0. \tag{4}$$

Wenn man mit Poisson und Stokes schreibt;

$$p_{xx} - p = -2\mu e - \lambda\omega; \qquad p_{yz} = -\mu a; \tag{5a}$$

$$p_{yy} - p = -2\mu f - \lambda\omega; \qquad p_{zx} = -\mu b; \tag{5b}$$

$$p_{zz} - p = -2\mu g - \lambda\omega; \qquad p_{xy} = -\mu c; \tag{5c}$$

und wenn man in den allgemeinen Gleichungen:

$$\varrho\left(\frac{du}{dt} - X\right) + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} = 0, \tag{6a}$$

wie vorher die Glieder vernachlässigt, welche sich auf die Trägheit der Substanz oder die Wirkung von Kräften, wie die Schwere, beziehen, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2\mu\frac{\partial e}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\omega}{\partial x} + \mu\frac{\partial c}{\partial y} + \mu\frac{\partial b}{\partial z}, \tag{7a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu\frac{\partial c}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial\omega}{\partial y} + \mu\frac{\partial a}{\partial z}, \tag{7b}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu\frac{\partial b}{\partial x} + \mu\frac{\partial a}{\partial y} + 2\mu\frac{\partial g}{\partial z} + \lambda\frac{\partial\omega}{\partial z}. \tag{7c}$$

Die Gleichungen (3) und (4) erlauben eine Vereinfachung dieser Gleichungen. Man findet:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu x\frac{d^2\sigma(z)}{dz^2}, \tag{8a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu y\frac{d^2\sigma(z)}{dz^2}, \tag{8b}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 2(\lambda + \mu)\frac{d\sigma(z)}{dz} + (\lambda + 2\mu)\frac{dg}{dz}. \tag{8c}$$

Hieraus geht hervor:

1. dass für irgend eine horizontale Ebene gilt:

$$dp = \mu\psi(z) r\, dr, \tag{9}$$

wo $\psi(z)$ den Differentialquotient $d^2\sigma(z)/dz^2$ bedeutet; man hat infolgedessen:

$$p(z,r) - p(z,0) = \tfrac{1}{2}\mu\psi(z)\,.\,r^2, \tag{10}$$

und im besondern:

$$p(\tfrac{1}{2}l, R) - p(\tfrac{1}{2}l, 0) = \tfrac{1}{2}\mu\psi(\tfrac{1}{2}l)\,.\,R^2. \tag{11}$$

2. wenn z_1 und z_2 die Werte von z in zwei Punkten einer und derselben Vertikalen bedeuten, so hat man, nach (8c):

$$p(z_1, r) - p(z_2, r)$$
$$= 2(\lambda + \mu)\{\sigma(z_1) - \sigma(z_2)\} + (\lambda + 2\mu)\{g(z_1) - g(z_2)\}. \tag{12}$$

Wir setzen in dieser Gleichung $r = 0$; $z_1 = l$; $z_2 = \frac{1}{2}l$; dann gilt, mit Rücksicht auf Gleichungen (2):

$$p(l,0) - p(\tfrac{1}{2}l, 0) = -2(\lambda + \mu)\sigma(\tfrac{1}{2}l) + (\lambda + 2\mu)\{g(l) - g(\tfrac{1}{2}l)\}. \tag{13}$$

Verglichen mit der Gleichung (11) erlaubt Gleichung (13) zu schreiben:

$$p(l, 0) - p(\tfrac{1}{2}l, R)$$
$$= -2(\lambda + \mu)\sigma(\tfrac{1}{2}l) + (\lambda + 2\mu)\{g(l) - g(\tfrac{1}{2}l)\} - \tfrac{1}{2}\mu\psi(\tfrac{1}{2}l)R^2. \tag{14}$$

Wir betrachten, wie vorher, ein Element der Seitenfläche der Scheibe, gelegen in der Höhe $z = \frac{1}{2}l$; die Gleichungen (22) von § 1 sind da noch anwendbar, und wir haben, wenn wir Gleichungen (5) dieses Paragraphen berücksichtigen:

$$P = p(\tfrac{1}{2}l, R) - 2\mu e(\tfrac{1}{2}l, R) - \lambda\omega(\tfrac{1}{2}l, R), \tag{15}$$

woraus mit Hilfe der Gleichungen (3) dieses Paragraphen folgt:

$$P = p(\tfrac{1}{2}l, R) - 2(\lambda + \mu)\sigma(\tfrac{1}{2}l) - \lambda g(\tfrac{1}{2}l). \tag{16}$$

Wir betrachten nun die Ebene der obern Grundfläche der Scheibe. Für diese Ebene ist die Gleichung (24) von § 1 erfüllt. Geht man von den Gleichungen (5) und (10) des gegenwärtigen Paragraphen aus, so ergibt sich, wie man leicht einsieht:

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{R(z)} dr\,.\,r\,.\,p_{zz}$$
$$= \pi R^2(z)\{p(z,0) - 2\mu g(z) - \lambda\omega(z) + \tfrac{1}{4}\mu\psi(z)R^2(z)\}. \tag{17}$$

Dieser Wert des ersten Gliedes, in die Gleichung (24) von § 1 eingetragen, formt dieselbe zu einer Gleichung um, welche nach den vorhergehenden Gleichungen (2) und (3) geschrieben werden kann:

$$\Pi + P = p(l, 0) - (\lambda + 2\mu)g(l) + \tfrac{1}{4}\mu\psi(l)R_l^2. \tag{18}$$

Verbunden mit Gleichung (16) gibt Gleichung (18):

$$\Pi = p(l, 0) - p(\tfrac{1}{2}l, R)$$
$$+ 2(\lambda + \mu)\sigma(\tfrac{1}{2}l) - (\lambda + 2\mu)g(l) + \lambda g(\tfrac{1}{2}l) + \tfrac{1}{4}\mu\psi(l)R_l^2, \tag{19}$$

woraus gemäss Gleichung (14) folgt:

$$\Pi = -2\mu g(\tfrac{1}{2}l) - \tfrac{1}{2}\mu\{\psi(\tfrac{1}{2}l)R^2 - \tfrac{1}{2}\psi(l)R_l^2\}. \tag{20}$$

Diese Gleichung ist eine verallgemeinerte Form der Gleichung (28) von § 1. Tatsächlich wird man, wenn man in Gleichung (20) setzt:

$$g(z) = -2Jz(l-z); \qquad \sigma(z) = Jz(l-z); \qquad \psi(z) = -2J,$$

sofort auf die erwähnte Gleichung zurückgeführt.

Berücksichtigen wir, dass der zweite Koeffizient der Viskosität, im Vorhergehenden λ genannt, ausdrücklich in den Gleichungen [(5) und (7)], die uns von Anfang an Dienste geleistet haben, vorkam, so ist es bemerkenswert, dass das Resultat, welches wir eben erzielt haben, unabhängig von diesem Koeffizienten ist. Die Glieder, welche denselben enthalten, sind im Laufe der Rechnung eliminiert worden. Dieser Umstand verdient in Anbetracht der Unsicherheit, welche bezüglich des Koeffizienten λ besteht, und der Schwierigkeiten, welchen eine experimentelle Bestimmung desselben begegnet, besonders hervorgehoben zu werden[1]).

Es bereitet nicht die geringste Schwierigkeit, das Gewicht der Substanz der Scheibe in der vorausgehenden Rechnung zu berücksichtigen. Zu diesem Zwecke genügt es, die letzte Bewegungsgleichung zu modifizieren, die zur Bestimmung des Wertes von $\partial p / \partial z$ dient. Bezeichnet man mit γ die Beschleunigung der Schwere, so wird man $Z = -\gamma$ in dieser Gleichung einsetzen. Wiederholt man die gegebene Rechnung, so sieht man ein neues Glied $= -{}^1\!/_2 \varrho \gamma l$ im zweiten Gliede von Gleichung (20) auftreten, die sonst keine weitere Modifikation erfährt. Mit ϱ bezeichnet man die Dichte der Substanz, deren Veränderlichkeit mit der Höhe, wie kaum gesagt zu werden braucht, vernachlässigt wird[2]).

§ 4. Ist eine reibende Flüssigkeit, kompressibel oder nicht, die den von Poisson und Stokes aufgestellten Gesetzen gehorcht, geeignet, die Klasse der plastischen Körper zu repräsentieren? Nach unserer Meinung ist es erlaubt, daran zu zweifeln. In diesem Paragraphen beabsichtigen wir daher, eine neue Untersuchung des uns beschäftigenden Problems vorzunehmen, indem wir diesmal von der verallgemei-

---

1) Siehe Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie 1901, S. 108. — Diese Zeitschr. 38, 702—703 (1901).

2) Wir setzen eine Scheibe voraus, die vermöge der Fluidität ihrer Substanz infolge ihrer eigenen Schwere herabfliesst. In diesem Falle ist $\Pi = 0$. Nehmen wir die einfachen Hypothesen von § 1 an, so können wir schreiben:

$$\frac{1}{l^3} - \frac{1}{l_0^3} = \frac{\varrho \gamma t}{\mu R^2},$$

wo l der Wert ist, der einem beliebigen Augenblick t entspricht.

nerten Theorie der Viskosität ausgehen, die wir in mehreren früheren Arbeiten aufzustellen gesucht haben[1]).

Im folgenden bezeichnen wir mit n den Rigiditätsmodul, mit k und h die zwei Moduln die Kompressibilität, mit T die Dauer der Relaxationszeit; dies sind die charakteristischen Konstanten des Mediums. Durch p^0, $p_{xx}{}^0$, $p_{yy}{}^0$, $p_{zz}{}^0$, $p_{yz}{}^0$, $p_{zx}{}^0$, $p_{xy}{}^0$ stellen wir die Werte dar, welche im Punkte x, y, z dem Anfangsmoment $t = 0$ entsprechen. Indem wir im übrigen die in den vorigen Paragraphen benutzten Bezeichnungen beibehalten, können wir die Bewegungsgleichungen hinschreiben, deren erste die folgende ist.

$$\varrho\left(\frac{du}{dt} - X\right) + \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^{-t/T}\left\{\frac{\partial(p^0_{xx} - p^0)}{\partial x} + \frac{\partial p^0_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p^0_{zx}}{\partial z}\right\}$$
$$- \varepsilon^{-t/T}\int_0^t dt\, \varepsilon^{t/T}\left\{n\nabla^2 u + (k - h + \tfrac{1}{3}n)\frac{\partial \omega}{\partial x}\right\} = 0. \qquad (1\,\mathrm{a})$$

Wir behandeln die p^0, p^0_{xx} etc. als unbekannte Grössen; angenommen wird nur, dass sie nicht von den Koordinaten abhängen. Wie vorher vernachlässigen wir die auf der Trägheit der Substanz beruhenden Wirkungen wie auch die Effekte der äussern Kräfte, die durch die Ausdrücke X, Y, Z charakterisiert werden. Wir setzen auch voraus, dass die Bedingung der Inkompressibilität erfüllt ist. Unter diesen Annahmen vereinfacht sich Gleichung (1a) und nimmt die Gestalt an:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = n\varepsilon^{-t/T}\int_0^t dt\, \varepsilon^{t/T}\nabla^2 u; \qquad (2\,\mathrm{a})$$

die Gleichungen (1b) und (1c) ändern sich in gleicher Weise. Gemäss den Gleichungen (16) von § 1 ergibt sich:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 6n\varepsilon^{-t/T} x K_3, \qquad (3\,\mathrm{a})$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 6n\varepsilon^{-t/T} y K_3, \qquad (3\,\mathrm{b})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 6n\varepsilon^{-t/T}(K_2 - 2zK_3). \qquad (3\,\mathrm{c})$$

Hier ist gesetzt:

$$K_2 = \int_0^t dt\, \varepsilon^{t/T}\frac{1}{l^2}\cdot\frac{dl}{dt}. \qquad (4)$$

---

[1]) Siehe Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie 1901, S. 95 u. 161; 1902, S. 19 u. 488. — Diese Zeitschr. **38**, 690; **39**, 355 (1901); **40**, 581 (1902); **43**, 179 (1903).

$$K_3 = \int_0^t dt\, \varepsilon^{t/T} \frac{1}{l^3} \cdot \frac{dl}{dt}. \tag{5}$$

Es ist klar, dass K_2 und K_3 Funktionen von l oder von t sind und nicht von x, y, z abhängen können. Zu bemerken ist, dass sie für $t = 0$ verschwinden.

Aus den Gleichungen (3a) und (3b) folgt, dass für jede horizontale Ebene die Beziehung besteht:

$$p(z, r) - p(z, 0) = 3n\varepsilon^{-t/T} r^2 K_3. \tag{6}$$

Dagegen gilt für zwei Punkte, die sich auf derselben Vertikalen befinden:

$$p(z_1, r) - p(z_2, r) = 6n\varepsilon^{-t/T} (z_1 - z_2)\{K_2 - (z_1 + z_2) K_3\}. \tag{7}$$

Aus Gleichung (6) folgt, wenn man $z = \frac{1}{2}l$, $r = R$ setzt:

$$p(\tfrac{1}{2}l, R) - p(\tfrac{1}{2}l, 0) = 3n\varepsilon^{-t/T} R^2 K_3. \tag{8}$$

Wenn in Gleichung (7) $z_1 = l$, $z_2 = \frac{1}{2}l$, $r = 0$ gesetzt wird, so hat man:

$$p(l, 0) - p(\tfrac{1}{2}l, 0) = 3n\varepsilon^{-t/T} l(K_2 - \tfrac{3}{2}lK_3). \tag{9}$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit Gleichung (8) führt zu der Beziehung:

$$p(l, 0) - p(\tfrac{1}{2}l, R) = 3n\varepsilon^{-t/T} \{lK_2 - (\tfrac{3}{2}l^2 + R^2) K_3\}. \tag{10}$$

Für die Berechnung der Komponenten der Drucke haben wir die Gleichsetzungen:

$$p_{xx} - p = (p_{xx}^0 - p^0)\,\varepsilon^{-t/T} - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t dt\, \varepsilon^{t/T}\, 2ne \quad \text{etc.} \tag{11a}$$

$$p_{yz} = p_{yz}^0 \varepsilon^{-t/T} - \varepsilon^{-t/T} \int_0^t dt\, \varepsilon^{t/T}\, na \quad \text{etc.} \tag{12a}$$

Wir ziehen nun in Betracht, dass nach den oben besprochenen Hypothesen $c = 0$ ist. Wenn man anderseits $p_{xy}^0 = 0$ und $p_{xx}^0 = p_{yy}^0$ annimmt (Hypothesen, die aus Gründen der Symmetrie hervorgehen), so hat man fortwährend die Beziehungen $p_{xy} = 0$ und $p_{xx} = p_{yy}$. Man kann infolgedessen für die in der Höhe $z = \frac{1}{2}l$ gelegenen Elemente der Seitenfläche schreiben:

$$P = p_{xx}(\tfrac{1}{2}l, R) = p_{yy}(\tfrac{1}{2}l, R) = p_{rr}(\tfrac{1}{2}l, R). \tag{13}$$

Nehmen wir P unveränderlich an, so werden die Gleichungen (13) für $t = 0$:

$$P = p_{xx}^0 = p_{yy}^0 = p_{rr}^0. \tag{14}$$

Wir führen die Ausdrücke (11) in die Gleichung (13) ein; mit Rücksicht auf die Gleichungen (20) von § 1 haben wir:

$$P = p(\tfrac{1}{2}l, R) + (p^0_{xx} - p^0)\varepsilon^{-t/T} + 3n\varepsilon^{-t/T} l(K_2 - \tfrac{1}{2}lK_3). \tag{15}$$

Beachten wir zweitens, dass die Gleichung (24) von § 1 in der Ebene $z = l$ der obern Grundfläche befriedigt sein muss. Die Gleichungen (6) und (11) des gegenwärtigen Paragraphen erlauben uns, das Integral zu berechnen:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R(z)} dr.r.p_{zz} \tag{16}$$

$$= \pi R^2(z) \left\{ p(z,0) + (p^0_{zz} - p^0)\varepsilon^{-t/T} - 2n\varepsilon^{-t/T} \int_0^t dt \varepsilon^{t/T} g + \tfrac{3}{2}n\varepsilon^{-t/T} R^2 K_3 \right\}.$$

Führen wir diesen Wert in die Gleichung (24), § 1, ein und setzen für g seinen Wert [(20, § 1], so haben wir:

$$\Pi + P = p(l,0) + (p^0_{zz} - p^0)\varepsilon^{-t/T} - 12n\varepsilon^{-t/T} l(K_2 - lK_3)$$
$$+ \tfrac{3}{2}n\varepsilon^{-t/T} R_l^2 K_3. \tag{17}$$

Für $t = 0$ wird diese Gleichung einfach:

$$\Pi^0 + P = p^0_{zz}, \tag{18}$$

Π^0 bezeichnet hier den Wert, welchen im Anfangsmoment $t = 0$ der Druck Π, den wir als variabel ansehen, annimmt. Aus Gleichungen (14) und (18) folgt:

$$\Pi^0 = p^0_{zz} - p^0_{xx}; \tag{19}$$

man hat also, im Hinblick auf Gleichungen (15) und (17):

$$\Pi = p(l,0) - p(\tfrac{1}{2}l, R) + \Pi^0\varepsilon^{-t/T} - 15n\varepsilon^{-t/T} lK_2$$
$$+ \tfrac{3}{2}n\varepsilon^{-t/T}(9l^2 + R_l^2)K_3. \tag{20}$$

Indem man endlich diese Gleichung mit Gleichung (10) vergleicht, erhält man:

$$\Pi = \Pi^0\varepsilon^{-t/T} - 3n\varepsilon^{-t/T}\{4lK_2 - (3l^2 - R^2 + \tfrac{1}{2}R_l^2)K_3\}. \tag{21}$$

Dieses Resultat (das wir sofort besprechen wollen) ist eine Verallgemeinerung der Gleichung (28) von § 1.

§ **5.** Wir versuchen jetzt, das im vorigen Paragraphen betrachtete Problem in analoger Weise zu behandeln, wie dies in § 2 dieser Arbeit geschehen ist. Für die Symbole e, f, g, a, b, c, ω behalten wir die Bedeutung bei, die wir ihnen in § 1 zuerteilt haben; wir setzen:

$$\varepsilon^{-t/T}\int_0^t \frac{dt}{T}\varepsilon^{t/T} e = E; \qquad \varepsilon^{-t/T}\int_0^t \frac{dt}{T}\varepsilon^{t/T} a = A; \tag{1}$$

$$\varepsilon^{-t/T}\int_0^t \frac{dt}{T}\varepsilon^{t/T} f = F; \qquad \varepsilon^{-t/T}\int_0^t \frac{dt}{T}\varepsilon^{t/T} b = B; \tag{2}$$

$$\varepsilon^{-t/T}\int_0^t \frac{dt}{T}\varepsilon^{t/T} g = G; \qquad \varepsilon^{-t/T}\int_0^t \frac{dt}{T}\varepsilon^{t/T} c = C; \tag{3}$$

$$\varepsilon^{-t/T}\int_0^t \frac{dt}{T}\varepsilon^{t/T} \omega = \Theta; \tag{4}$$

mit n, k, h, T bezeichnen wir die Konstanten des vorigen Paragraphen, und mit μ und λ die Produkte nT und $(k - h - \frac{2}{3}n)T$; wir haben dann wie oben (siehe § 2):

$$d\mathfrak{T} + d\mathfrak{J} = dW + \iiint d\Omega\chi; \tag{5}$$

die Funktion χ hat nach unsern gegenwärtigen Hypothesen den Wert:

$$\begin{aligned}\chi = \varepsilon^{-t/T} &\{p^0_{xx}e + p^0_{yy}f + p^0_{zz}g + p^0_{yz}a + p^0_{zx}b + p^0_{xy}c - p^0\omega\} \\ &- 2\mu\{eE + fF + gG + \tfrac{1}{2}(aA + bB + cC)\} - \lambda\omega\Theta.\end{aligned} \tag{6}$$

Wir nehmen an $\omega = 0$, und infolgedessen $d\mathfrak{J} = 0$; $d\mathfrak{T} = 0$; $c = 0$ und $C = 0$; $e = f$; woraus folgt $E = F$; und endlich $g = -2e$; was als Folgerung in sich schliesst $G = -2E$. Die Gleichungen (20) von § 1 ergeben, wenn die Veränderlichkeit des Radius R vernachlässigt wird, die Beziehung:

$$\iiint d\Omega\, e = -\tfrac{1}{2}\pi R_l^2 \frac{dl}{dt}; \qquad \iiint d\Omega\, a = 0; \qquad \iiint d\Omega\, b = 0. \tag{7}$$

Man findet ebenso:

$$\iiint d\Omega\chi = (p^0_{zz} - p^0_{xx})\varepsilon^{-t/T}\pi R_l^2 \frac{dl}{dt} - \mu\iiint d\Omega\,(12eE + aA + bB). \tag{8}$$

Gemäss den Gleichungen (20) von § 1, (4) und (5) von § 4, sowie (1) und (2) des gegenwärtigen Paragraphen kann der zweite Ausdruck des zweiten Gliedes geschrieben werden:

$$\begin{aligned}6n\varepsilon^{-t/T}\pi J\int_0^l\int_0^{R(z)} dz\,dr\,r\,&\{12z^2(l - z)(K_2 - zK_3) \\ &+ r^2(l - 2z)(K_2 - 2zK_3)\},\end{aligned} \tag{9}$$

so dass, wenn man setzt:

$$dW = -\pi R_l^2 \Pi dl, \tag{10}$$

man den Wert von Π mittels der Gleichung (5) bestimmen kann. Um die Rechnung durchzuführen, ist die Kenntnis der Gestalt der Funktion $R(z)$ notwendig. Wenn man sie als eine Konstante behandelt, erhält man einen Ausdruck, der sich von dem durch Gleichung (21), § 4, gelieferten nur durch die numerischen Werte der Koeffizienten der kleinen Glieder: lK_2, l^2K_3, unterscheidet.

§ 6. Es erübrigt noch, den Wert der Konstanten Π^0 zu bestimmen. Die obigen Methoden liefern uns nicht das Mittel hierzu. Aber es ist klar, dass wir uns nicht weit von der Wahrheit entfernen, wenn wir annehmen, dass die Eigenschaften der Substanz im Anfangsmoment die eines festen, isotropen, vollkommen elastischen Körpers sind. Wir sind also vor die Aufgabe gestellt, die Bedingungen des elastischen Gleichgewichts einer platten Scheibe, die man zwischen zwei vollkommen „rauhen" Flächen zusammendrückt, zu untersuchen. Dieses Problem ist von mehrern Forschern behandelt worden, in erster Linie von Herrn L. N. G. Filon, der in einer äusserst bemerkenswerten Arbeit demselben eine tiefgründige Erörterung gewidmet hat[1]). Wir beschränken uns auf die Angabe des sehr einfachen Resultats, zu dem man unter der Annahme, dass das Verhältnis l/R klein ist, gelangt; es ist dies der Fall, der für uns in Betracht kommt. Man findet in diesem Falle[2]) dass der scheinbare Modul von Young merklich gleich ist $k + {}^4\!/_3 n$ (mit den oben angenommenen Bezeichnungen, § 4); hieraus folgt:

$$\Pi^0 = (k + \tfrac{4}{3} n) \frac{l^* - l^0}{l^0}, \tag{1}$$

wo l^* die Dicke der nicht deformierten Scheibe bezeichnet, mithin den Wert von l^0 für $\Pi^0 = 0$. Die Gleichung (1) gilt sichtlich nur unter der Bedingung, dass die Differenz $l^* - l^0$ klein angenommen wird.

Gleichung (1) lässt sich leicht aus dem Theorem von Clapeyron ableiten[3]). Es seien ξ^0, η^0, ζ^0 die Komponenten der Verschiebung; ε^0, φ^0, ψ^0, α^0, β^0, γ^0 die der Deformation. Wir setzen:

$$\varepsilon^0 = 0; \qquad \varphi^0 = 0; \qquad \psi^0 = -\frac{l^* - l^0}{l^0}; \tag{2}$$

---

[1]) Phil. Trans. Roy. Soc. of London **198** A., 147 (1902). Es sei uns gestattet, dem Autor für die freundlichst uns gewährte Unterstützung den besten Dank auszusprechen.

[2]) Siehe § 25 der citierten Arbeit von Filon, S. 216—217.

[3]) Siehe oben S. 184.

$$\alpha^0 = 0; \qquad \beta^0 = 0; \qquad \gamma^0 = 0. \tag{3}$$

Da ξ^0, η^0, ζ^0 für $z = 0$ verschwinden, so können wir setzen:

$$\zeta^0(z) = \psi^0 z \qquad \zeta^0(l^0) = -(l^* - l^0), \tag{4}$$

$$\xi^0(x, y, z) = 0; \qquad \eta^0(x, y, z) = 0. \tag{5}$$

Die zwei Glieder der Gleichung von Clapeyron sind mithin:

$$(l^* - l^0)\,\pi R_0^2 \Pi^0 \qquad \text{und} \qquad (k + \tfrac{4}{3} n)\frac{(l^* - l^0)^2}{l^0}\,\pi R_0^2. \tag{6}$$

und die Anwendung des Theorems führt zu Formel (1), wie gesagt worden ist.

§ 7. Wenden wir uns nochmals zu der Gleichung (21) von § 4. Wir vernachlässigen darin die Ausdrücke von der Form lK_2, l^2K_3; die Radien R und R_l betrachten wir als gleich. Wir haben dann:

$$\Pi = \Pi^0 \varepsilon^{-\frac{t}{T}} - {}^3/_2\, n \varepsilon^{-\frac{t}{T}} R^2 K_3. \tag{1}$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach der Variablen t, so ergibt sich:

$$\frac{d\Pi}{dt} + \frac{\Pi}{T} + {}^3/_2 \frac{nR^2}{l^3} \cdot \frac{dl}{dt} = 0. \tag{2}$$

Es ist dies die verallgemeinerte Form der Gleichung von Stefan (siehe (29), § 1). Dieselbe nimmt den Druck Π als variabel an; warum scheint im Gegensatz hierzu die Gleichung von Stefan die Annahme $d\Pi/dt = 0$ in sich zu schliessen? Man kann sich hierüber leicht Rechenschaft geben. Die gewöhnlich angenommene Theorie der Reibung, worin nicht berücksichtigt wird, dass die Geschwindigkeit der Relaxation eine endliche ist, kann zu einer korrekten Lösung des uns beschäftigenden Problems nur für den Einzelfall führen, wo der Druck Π konstant ist.

Es ist interessant zu bemerken, dass die Gleichung (2) sich unmittelbar durch Anwendung eines allgemeinen Theorems entwickeln lässt, das wir in § 3 unseres Aufsatzes: „Sur la fonction dissipative d'un fluide visqueux", angegeben haben[1]).

Stellen wir uns vor, dass es einem Experimentator gelänge, die Änderung des Druckes Π in der Weise zu regulieren, dass die Dicke l der Scheibe konstant gehalten würde, so hätte man dann:

$$\Pi = \Pi^0 \varepsilon^{-\frac{t}{T}}, \tag{3}$$

und die Lehre von der Relaxation würde, so zu sagen, durch ein unmittelbares Experiment dargethan sein.

---

[1]) Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, Oktober 1902, S. 492. — Diese Zeitschr. **43**, 182 (1903).

Ein solcher Versuch, wenn er sich ausführen liesse, würde deutlich den wesentlichen Mangel der gewöhnlich angenommenen Theorie vor Augen stellen, der die Annahme einer unendlichen Geschwindigkeit der Relaxation zu Grunde liegt.

In dem Falle, wo der Druck Π konstant ist, führt die Integration der Gleichung:

$$\Pi = - {}^3/_2 \frac{\mu R^2}{l^3} \frac{dl}{dt} \tag{4}$$

zu einer Gleichung, die man gemäss der Beziehung (1) von § 6 schreiben kann:

$$\frac{t}{T} = \frac{3n}{4(k + {}^4/_3 n)} \frac{R^2 l^0}{l^* - l^0} \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l^{0\,2}} \right). \tag{5}$$

Nehmen wir die Differenz $(l^0 - l)$ klein an und lassen zur Vereinfachung die Beziehung $k = {}^5/_3 n$ gelten, so haben wir:

$$\frac{t}{T} = {}^1/_2 \frac{R^2 (l^0 - l)}{l^2 (l^* - l^0)}. \tag{6}$$

Die Schlussfolgerung, zu der man von den Resultaten dieses Paragraphen gelangt, ist die, dass Experimentaluntersuchungen, die unter den angezeigten Bedingungen gemacht würden, nicht nur die Ableitung des Wertes des Koeffizienten der innern Reibung μ (wie es von Herrn v. Obermayer ausgeführt worden ist), sondern auch die Bestimmung der Dauer der charakteristischen Periode T der Relaxation für die untersuchte Substanz erlauben würden.

1180068578 PAd
Sygn.
340820

1180068577 PAd
Sygn.
300336

WSPÓŁOPRAWNE
Uniwersytet Wrocławski
Biblioteka Wydziału Prawa,
Administracji i Ekonomii
300336 II ;
340820 II
Egzemplarz udostępniany w czytelni